UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA

Progetto Olimpiadi di Matematica 2012

GARA di SECONDO LIVELLO

MIUR

Pisa, 1 febbraio 2012

Caro collega,
ti inviamo come d'accordo il materiale della gara di Matematica di secondo livello che, come già avvenuto negli anni scorsi, è unica per il Biennio ed il Triennio. Questo materiale consiste di:

1. testo della gara di secondo livello;
2. scheda dei risultati distrettuali;

Organizzazione
Come al solito, la gestione della gara di selezione distrettuale dell'8 febbraio è lasciata completamente all'iniziativa e all'organizzazione dei responsabili distrettuali. Ti raccomandiamo soltanto che la gara abbia la durata di 3 ore e che si svolga tassativamente **nella mattina** del giorno prefissato (8 febbraio), onde garantire la segretezza dei quesiti. Questo è tanto più essenziale, data la pubblicazione delle soluzioni sul web la mattina successiva. Per garantire l'obbiettività delle selezioni, ti preghiamo di curare particolarmente la serietà e la regolarità dello svolgimento della prova, annullando senza esitazione tutti gli elaborati che presentano gravi irregolarità.

Correzione degli elaborati
Le soluzioni e le indicazioni per la correzione non sono incluse in questo messaggio, ma verranno pubblicate nel sito internet `http://olimpiadi.dm.unibo.it` il mattino successivo alla gara. In ogni caso, il giorno dopo la gara, le soluzioni e le indicazioni per la correzione ti saranno spedite per posta elettronica. Solo in caso di difficoltà, è possibile richiedere una copia cartacea delle soluzioni all'UMI, che farà un invio per posta prioritaria. La Commissione auspica così di rendere meno credibili le voci di irregolarità che, purtroppo, accompagnano sempre simili occasioni. In ogni caso, qualora tu sia a conoscenza di elementi che possano invalidare le prove o comunque renderne sospetta la regolarità, ti preghiamo di comunicarceli.
Per la correzione degli elaborati, se vorrai, potrai farti affiancare da qualche collega, anche di altra scuola (questo potrebbe avere un buon effetto promozionale), fermo restando che la responsabilità della valutazione rimane tua.
Sottolineiamo l'unica importante **novità di quest'anno**: seguendo la richiesta di molti responsabili distrettuali, il punteggio dei problemi dimostrativi passa a **15 punti**. Ti preghiamo di evidenziare questa importante novità, comunicandola ai partecipanti al momento della distribuzione dei testi, prima dell'inizio della gara. Come di consueto, nel file contenente le soluzioni saranno fornite indicazioni per l'attribuzione dei punteggi.

Selezione dei partecipanti alla gara nazionale
Come già avvenuto negli anni passati, ogni distretto avrà una quota predeterminata di studenti invitati a Cesenatico, che è già stata pubblicata sul sito `http://olimpiadi.dm.unibo.it`. Sottolineiamo che, come già sperimentato con successo negli anni scorsi, ogni Responsabile decide autonomamente, sulla base dei risultati della gara di febbraio, gli allievi che compongono la quota del suo distretto e li segnala alla Commissione. Il responsabile dovrà trascrivere nella scheda **solo un numero di nominativi pari alla quota del distretto**, e trasmettere alla Commissione **esclusivamente gli elaborati degli studenti prescelti**. La gara di Cesenatico si svolgerà nei giorni 4–5–6 maggio e ad essa parteciperanno circa 300 studenti. Si consiglia di verificare preliminarmente la disponibilità degli allievi selezionati alla partecipazione alla gara di Cesenatico, in quanto non saranno consentite sostituzioni dopo la pubblicazione dell'elenco degli invitati.

Criteri per la selezione
Migliorare il "punteggio" che un distretto ottiene alla gara di Cesenatico è di importanza fondamentale per il calcolo della quota distrettuale. Per questo scopo, hai piena libertà di scelta nella selezione dei partecipanti a Cesenatico: qualunque criterio ragionevole può essere utilizzato, purché sia comunicato ai referenti di istituto (meglio ancora se riesci a concordare tale criterio con loro, magari con discussione in

un'opportuna assemblea). Ovviamente, eventuali "errori" nella selezione causeranno un abbassamento del punteggio del distretto e, a lungo andare, una perdita di posti nella quota distrettuale.
Naturalmente noi consigliamo, laddove le condizioni ragionevolmente lo permettono, un'ampia partecipazione di giovani anche alla gara nazionale. A questo scopo, si suggerisce di valutare i risultati degli studenti del biennio anche in senso relativo, e non solo sulla base della graduatoria aritmetica, in modo che, quando la differenza di punteggio sia abbastanza piccola, il migliore del biennio possa sopravanzare il secondo o il terzo del triennio.
Come riferimento eventuale, ma **senza che vi sia alcun obbligo da parte tua di applicarla**, ti ricordiamo la regoletta suggerita negli anni scorsi.
"Qualora la quota distrettuale sia di almeno 4 (rispettivamente 7, 11), la graduatoria del distretto deve essere modificata aumentando del 20% il punteggio del primo classificato (rispettivamente dei primi due, dei primi tre) fra gli studenti del biennio, e la selezione deve essere effettuata in base a questa graduatoria modificata. In caso di parità fra uno studente del biennio ed uno del triennio, la preferenza va allo studente del biennio."
La commissione nazionale formulerà l'elenco dei partecipanti alla Gara Nazionale tenendo conto delle segnalazioni pervenute. Il giudizio della commissione è insindacabile.

Trasmissione dati per elaborazione delle statistiche con foglio EXCEL
Avrai certamente notato che negli ultimi anni sono state distribuite le statistiche aggregate per regione e a livello nazionale. Spero che la stragrande maggioranza dei responsabili distrettuali abbia apprezzato la possibilità di aver accesso a queste informazioni per organizzare meglio la gara di febbraio. Per questo motivo, ripetiamo anche quest'anno la raccolta dei dati, pregando caldamente tutti i Responsabili Distrettuali di non far mancare quest'anno il loro contributo.
Quest'anno non troverai il modulo cartaceo per le statistiche della gara distrettuale. Infatti, grazie alla collaborazione di Marcello Villani, ogni Responsabile impegnato nella correzione riceverà un file EXCEL in cui inserire la stringa delle risposte e i punteggi ottenuti nei problemi dimostrativi di ciascun partecipante alla gara di febbraio, in modo da ottenere automaticamente il punteggio totale. Tale foglio, dopo la sua completa compilazione, dovrà essere inserito direttamente nell'area appositamente prevista sul sito delle olimpiadi

http://olimpiadi.dm.unibo.it/responsabili/

in modo da riuscire a costituire un unico grande database con tutti i risultati della gara (ci aspettiamo circa 13000 partecipanti). Per l'accesso a tale area dovrai utilizzare come credenziali di accesso la coppia username–password personale che ti è stata comunicata in occasione degli scorsi giochi di Archimede (naturalmente ti preghiamo di mantenere assolutamente riservata la password per evitare intrusioni nel sito).
Per l'utilizzo di questa nuova modalità di immissione dei dati, giungeranno istruzioni più dettagliate nei prossimi giorni per posta elettronica. L'invio dei dati per via informatica ci consentirà di snellire il lavoro e di rendere disponibili in tempi ragionevolmente rapidi i nomi degli ammessi.

Trasmissione elaborati e comunicazione dei selezionati
Nell'unica scheda cartacea spedita quest'anno è necessario indicare i nominativi degli allievi che intendi selezionare per la partecipazione alla gara di Cesenatico, ovviamente **tanti quanti ne prevede la quota che è stata assegnata al tuo distretto**.
Preghiamo in particolare i responsabili dei distretti accorpati e dei distretti in cui è presente più di un responsabile di lavorare a questa fase in maniera congiunta, inviando una sola scheda da ogni distretto.
Ti preghiamo di allegare tale scheda dei selezionati al plico contenente i compiti dei ragazzi medesimi **(un plico unico e una sola graduatoria da ogni distretto)**, che deve essere spedito via posta in modo che possa pervenire entro il 31 marzo 2012 al seguente indirizzo:
Segreteria scientifica delle Olimpiadi di Matematica
c/o Dipartimento di Matematica Applicata "U. Dini"
Università di Pisa, via Filippo Buonarroti 1/c - 56127 Pisa.
Ti preghiamo di non dimenticare la taglia della maglietta, visto che anche quest'anno cercheremo di distribuire questo gadget a tutti i partecipanti.
Se hai la possibilità di utilizzare uno scanner, al posto della spedizione del plico contenente i compiti potrai inviare un file in formato `.pdf` contenente la scannerizzazione dei compiti e della scheda coi nomi dei segnalati. Tale file dovrà essere spedito all'indirizzo `m.barsanti@dma.unipi.it` Questa modalità di

invio dei dati è destinata ad essere l'unica possibile nei prossimi anni, in linea con le politiche nazionali di riduzione del materiale cartaceo.

Gara a squadre

Come già avvenuto negli anni passati, a Cesenatico avrà luogo anche la gara a squadre nazionale per la quale provvederemo a scegliere un numero adeguato di squadre partecipanti che verranno tempestivamente avvisate. Anche quest'anno saranno convocate a tale gara le squadre migliori classificate in gare a squadre locali effettuate in ambito almeno distrettuale, che ormai da svariati anni hanno grande successo in molte parti d'Italia.
Per ulteriori informazioni, consultare il sito `http://gareasquadre.disi.unige.it`

Ti ringraziamo per la collaborazione e speriamo di poterti incontrare a Cesenatico.

La Commissione Nazionale delle Olimpiadi

Progetto Olimpiadi della Matematica
Dipartimento di Matematica Applicata – Via Filippo Buonarroti 1/c - 56127
E–mail: `villani@p2p.it`, `http://olimpiadi.dm.unibo.it`

UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA

Progetto Olimpiadi di Matematica 2012

GARA di SECONDO LIVELLO

MIUR

SCHEDA DEI RISULTATI DISTRETTUALI

(Da restituire entro il **31 marzo 2012** assieme ai compiti dei **soli** studenti segnalati (numero di compiti pari alla quota distrettuale)

Distretto:______________________________

Numero totale di partecipanti:__________

Studenti segnalati per la partecipazione alla gara nazionale.

					Punteggio		
Cognome e Nome	Sesso	Classe	Taglia	Scuola	Es. 1-14	Es. 15-17	Totale
1.							
2.							
3.							
4.							
5.							
6.							
7.							
8.							
9.							
10.							
11.							
12.							
13.							
14.							
15.							

Firma/e del responsabile distrettuale che ha coordinato la raccolta dei dati:

Prof.______________________________ Taglia per eventuale maglietta: S M L XL

Prof.______________________________ Taglia per eventuale maglietta: S M L XL

Prof.______________________________ Taglia per eventuale maglietta: S M L XL

UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA

Progetto Olimpiadi di Matematica 2011

GARA di SECONDO LIVELLO

8 febbraio 2012

1) Non sfogliare questo fascicoletto finché l'insegnante non ti dice di farlo. NON È AMMESSO L'UTILIZZO DI CALCOLATRICI TASCABILI, LIBRI DI TESTO E TAVOLE NUMERICHE. È proibito comunicare con altri concorrenti o con l'esterno; IN PARTICOLARE, È VIETATO L'USO DI TELEFONI CELLULARI.
2) La prova consiste di 17 problemi divisi in 3 gruppi.
3) Nei problemi dal numero 1 al numero 12 sono proposte 5 risposte possibili, indicate con le lettere **A, B, C, D, E**. **Una sola** delle risposte è corretta. La lettera corrispondente alla risposta corretta dovrà essere riportata, per ogni quesito, in fondo a questa pagina nella relativa finestrella. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
4) I problemi 13 e 14 richiedono una risposta che è data da un numero intero. Questo numero intero va indicato in fondo a questa pagina nella relativa finestrella. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
5) I problemi 15, 16 e 17 richiedono invece una dimostrazione. Ti invitiamo a formulare le soluzioni in modo chiaro e conciso usufruendo dello spazio riservato e consegnando soltanto i fogli di questo fascicoletto. Tali problemi verranno valutati con un punteggio **da 0 a 15**.
6) Quando l'insegnante dà il via, comincia a lavorare. Hai **3 ore** di tempo. Buon lavoro!

Da riempirsi da parte dello studente:

Nome:______________________ Cognome:______________________

Indirizzo:______________________ Città:______________________

Scuola:______________________ Anno di corso:__________ Città:______________________

e–mail:______________________ Taglia per eventuale maglietta: S M L XL

Codice fiscale:______________________ Nazionalità:______________________

Risposte ai primi 14 quesiti

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

PUNTEGGIO DIMOSTRAZIONI (da riempirsi a cura dell'insegnante)

valutazione esercizio n.15	
valutazione esercizio n.16	
valutazione esercizio n.17	
PUNTEGGIO TOTALE (DAL FOGLIO EXCEL)	

Visitate il sito internet delle olimpiadi: `http://olimpiadi.dm.unibo.it`

Problemi a risposta multipla – 5 punti

1. Due numeri a e b sono tali che $\dfrac{3a+b}{a-b}=2$. Quanto vale $\dfrac{a^3}{b^3}$?

   (A) -27 **(B)** -8 **(C)** 1 **(D)** 8 **(E)** 27.

2. Marco, Fabrizio e Giovanni, tre matematici, sfidano un gruppo di quattro fisici a un torneo di calcio balilla. Giocano un incontro per ogni possibile combinazione di due matematici (uno in attacco, uno in difesa) contro due fisici (uno in attacco, uno in difesa). Ciascun incontro ha la stessa durata, e in totale il torneo dura ben 24 ore (senza pause). Quanto tempo gioca Marco in difesa?
   Si noti che, ad esempio, vi saranno due incontri diversi di Marco e Fabrizio contro un certo attaccante e un certo difensore fra i fisici: uno con Marco attaccante e Fabrizio difensore, uno viceversa.

   (A) 2 ore e 24 minuti **(B)** 4 ore e 48 minuti **(C)** 6 ore **(D)** 8 ore **(E)** 12 ore.

3. Alice, Berto e Carlo stanno cercando un tesoro. Sapendo che i tre amici si trovano sui vertici di un triangolo equilatero e che il tesoro si trova in un punto al di fuori del triangolo, a 1 metro di distanza da Alice e da Berto e 2 metri di distanza da Carlo, quanti metri misura il lato del triangolo?

   (A) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ **(B)** $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ **(C)** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **(D)** $\dfrac{3}{2}$ **(E)** $\sqrt{3}$.

4. Quanti sono i numeri di 2 cifre tali che, se si sottrae la somma delle cifre dal numero di partenza, si ottiene 45?

   (A) 0 **(B)** 1 **(C)** 9 **(D)** 10 **(E)** 20.

5. Si sa che $p(x)$ è un polinomio monico di grado 5. Inoltre, si sa che le soluzioni dell'equazione $p(x)=0$ sono esattamente $x=0,1,2,4$. Determinare il massimo valore che può assumere il coefficiente del termine di primo grado.
   Nota: un polinomio è *monico* se il coefficiente del suo termine di grado più alto (nel nostro caso: quello di quinto grado) è 1.

   (A) -32 **(B)** 16 **(C)** 32 **(D)** 64 **(E)** Può assumere valori arbitrariamente grandi.

6. Dopo una gara fra cinque cavalli, cinque amici si incontrano e parlano dei risultati. Si sa che ognuno di loro ha puntato su un cavallo diverso, e che mentono entrambe le persone che hanno puntato sul primo e sull'ultimo classificato; le altre dicono la verità. Le loro affermazioni sono le seguenti:
   Alex: "Il cavallo su cui ha puntato Igor ha distanziato di almeno due posizioni il cavallo di Enrica."
   Enrica: "Il cavallo su cui ho puntato io ha vinto."
   Igor: "Il cavallo su cui ha puntato Osvaldo ha superato il mio."
   Osvaldo: "Il cavallo su cui ho puntato non è arrivato fra i primi tre."
   Umberto: "Il mio cavallo non ha vinto ma è arrivato subito dopo quello di Alex e subito prima di quello di Enrica."
   Chi ha puntato sul cavallo classificatosi terzo?

   (A) Alex **(B)** Igor **(C)** Osvaldo **(D)** Umberto **(E)** Non è possibile determinarlo.

7. Sia ABC un triangolo isoscele con base BC, sia D il punto medio di AC. Sapendo che BCD è a sua volta isoscele con base CD e che $BC=2$, quanto misura l'area di ABC?

   (A) 2 **(B)** $\sqrt{5}$ **(C)** $\sqrt{6}$ **(D)** $\sqrt{7}$ **(E)** 3.

8. Le spese per organizzare le Olimpiadi Nazionali della Matematica incrementano ogni anno dello $0,5\%$ rispetto all'anno precedente. In che anno le spese saranno *esattamente il doppio* rispetto a quelle del 2012?
   Nota: nel 2012 le spese non sono nulle.

   (A) 2023 **(B)** 2150 **(C)** 2151 **(D)** 2212 **(E)** mai.

9. Quante sono le coppie di interi positivi (m, n) tali che la frazione $\dfrac{m}{n}$ sia ridotta ai minimi termini e strettamente minore di 1, e che il prodotto mn sia uguale a $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot 24 \cdot 25$ (ovvero al prodotto dei primi 25 interi positivi)?

(A) 2^7 **(B)** $2^8 - 1$ **(C)** 2^8 **(D)** $2^9 - 1$ **(E)** 2^9.

10. Tre persone A, B, C si trovano in prossimità di un incrocio stradale tra due strade perpendicolari. A si trova esattamente sull'incrocio, mentre B e C si trovano su due strade distinte. Nel campo nei pressi dell'incrocio (all'interno dell'angolo retto $C\widehat{A}B$) c'è un cartellone pubblicitario, sostenuto da due pali piantati nel terreno nei punti D ed E, che distano tra loro esattamente un metro. Sapendo che gli angoli $D\widehat{A}E$, $D\widehat{B}E$ e $D\widehat{C}E$ misurano tutti 30 gradi, qual è la distanza (in linea d'aria) tra B e C?

(A) $\dfrac{3}{2}$ m **(B)** $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ m **(C)** $\sqrt{3}$ m **(D)** 2 m **(E)** Non è possibile determinarlo.

11. Una scacchiera 8 per 8 viene riempita con le lettere A, B, C, D in modo che due caselle con un lato o un vertice in comune contengano lettere diverse, e in modo che le lettere A e le lettere B abbiano la proprietà seguente: ogni qual volta una A o una B ha una certa lettera X adiacente in orizzontale o verticale (X può essere A, B, C o D), allora dal lato opposto c'è un'altra X (a meno che non ci sia il bordo). In quanti modi è possibile sistemare tali lettere nella scacchiera?

(A) 136 **(B)** 144 **(C)** 168 **(D)** 328 **(E)** 360.

12. Un folletto sceglie due numeri dispari x, y tali che $0 < y < x < 2012$, calcola $x^2 - y^2$ e scrive il risultato su un foglio. Ogni mattina (a partire da quella del giorno successivo) si sveglia, legge il numero scritto sul foglio e, se questo numero è pari, lo sostituisce con la sua metà e va a fare uno scherzetto a qualcuno.
Il giorno in cui per la prima volta legge un numero dispari, scompare ritornando nel mondo delle fate.
Quanti scherzetti fa al massimo il folletto?

(A) 11 **(B)** 12 **(C)** 14 **(D)** 21 **(E)** 22.

Problemi a risposta numerica – 5 punti

13. Sia Γ_0 una circonferenza di raggio 2^{2012}, e sia $A_0B_0C_0$ un triangolo equilatero inscritto in Γ_0. Sia Γ_1 la circonferenza di raggio più piccolo tangente ad A_0B_0 nel suo punto medio H_0, e a Γ_0. Si costruiscono le circonferenze $\Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ allo stesso modo, in modo che Γ_n sia una delle circonferenze di raggio più piccolo tangente a Γ_{n-1} e ad un lato di un triangolo equilatero inscritto in Γ_{n-1} nel suo punto medio. Qual è il più piccolo valore di n per cui l'area del cerchio racchiuso da Γ_n è minore di 1?

14. Siano $p(x)$ e $q(x)$ due polinomi *distinti* di grado minore o uguale a 3, a coefficienti interi e tali che

$$p(1) = q(1),\ p(2) = q(2),\ p(3) = q(3),$$

$$p(-1) = -q(-1),\ p(-2) = -q(-2),\ p(-3) = -q(-3).$$

Qual è il minimo valore che può assumere $[p(0)]^2 + [q(0)]^2$?

15. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Dato un qualsiasi intero positivo n, chiamiamo *ciclostilato* di n il numero che si ottiene concatenando 2012 scritture di n (in base 10). Per esempio il ciclostilato di 314 è $314314314\ldots314$, dove le cifre "314" si ripetono 2012 volte.

(a) Determinare tutti gli interi positivi m tali che il ciclostilato di m sia multiplo di 9.

(b) Determinare tutti gli interi positivi m tali che il ciclostilato di m sia multiplo di 11.

SOLUZIONE

Nome:________________ Cognome:________________

16. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Normalmente Davide ha bisogno di dormire almeno 8 ore per notte. Se una notte dorme k ore meno di quanto gli occorra, si ritrova ad aver bisogno di k ore in più di sonno per le k notti successive. Ogni notte dorme comunque un numero intero di ore minore o uguale al suo fabbisogno. Ad esempio, se lunedì notte ha bisogno di 8 ore, ma ne dorme 7, martedì avrà bisogno di 9 ore. Se mercoledì ha bisogno di 8 ore, ma ne dorme 6, giovedì e venerdì avrà bisogno di almeno 10 ore di sonno; se giovedì ne dorme solo 9, venerdì sentirà la necessità di 11 ore (8, più 2 per le ore perse mercoledì, più 1 per quella non dormita giovedì).

Un certo lunedì notte Davide avrebbe necessità di dormire 8 ore; lo stesso si verifica la notte del lunedì della settimana successiva. Nel corso della settimana ci sono state 7 ore in cui avrebbe avuto bisogno di dormire ma non l'ha fatto: quante ore ha dormito come minimo Davide nelle sette notti che vanno da lunedì a domenica?

SOLUZIONE

Nome:________________ Cognome:________________

17. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**
Sia ABC un triangolo acutangolo; sia O il suo circocentro e siano P, Q i punti (diversi da A) in cui rispettivamente l'altezza uscente dal vertice A e il prolungamento di AO incontrano la circonferenza circoscritta ad ABC.

(a) Si dimostri che gli angoli $B\widehat{A}P$ e $Q\widehat{A}C$ sono congruenti;

(b) Si dimostri che i triangoli BCP e CBQ sono congruenti;

(c) Si dimostri che, detti M e N i punti medi di AB e AC, l'area del quadrilatero $ABPC$ vale quattro volte l'area del quadrilatero $AMON$.

SOLUZIONE

Nome:________________ Cognome:________________